STOCHASTIK

Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Hartmut Meyer
https://mathemeyer.com

Inhalt

Zufallsexperimente

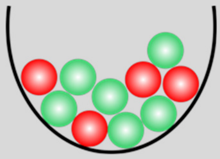
Ein Experiment, das zumindest theoretisch beliebig oft wiederholt werden kann und dessen Ergebnis sich nicht mit Sicherheit vorhersagen lässt, heißt **Zufallsexperiment**.

Die Menge Ω aller möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments heißt die **Ergebnismenge** des Experiments.

Beispiele:

Zufallsexperiment: *Ziehen einer Kugel aus einer Urne.*

mögl. Ergebnismenge: $\Omega = \{rot, grün\}$



Zufallsexperiment: *Münzwurf*

mögl. Ergebnismenge: $\Omega = \{Zahl, Wappen\}$

Zufallsexperiment: *Werfen eines Würfels*

mögl. Ergebnismenge: $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

oder: $\Omega = \{6; nicht\ 6\} = \{6;\ \overline{6}\}$

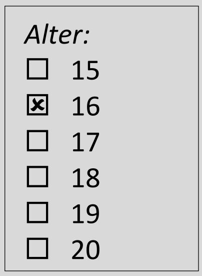
Zufallsexperiment: *Werfen einer Reißzwecke*

mögl. Ergebnismenge: $\Omega = \{Lage\ A; Lage\ B\}$

Lage A *Lage B*

Zufallsexperiment: *Befragung in der Oberstufe*

mögl. Ergebnismenge: $\Omega = \{15; 16; 17; 18; 19; 20\}$



Ergebnisse eines Zufallsexperiments können zu einem **Ereignis** zusammengefasst werden. Ereignisse sind also Teilmengen der Ergebnismenge Ω des Zufallsexperiments.

Beispiel: *Befragung in der Oberstufe*

Alter:
☐ 15
☐ 16
☐ 17
☒ 18
☐ 19
☐ 20

Ergebnismenge: $\Omega = \{15; 16; 17; 18; 19; 20\}$

Mögliche Ereignisse:

E_1: *„Die Schülerin bzw. der Schüler ist volljährig“*
$E_1 = \{18; 19; 20\}$

E_2: *„Das Alter der Schülerin bzw. des Schülers ist eine gerade Zahl“*
$E_2 = \{16; 18; 20\}$

E_3: *„Die Schülerin bzw. der Schüler ist jünger als 16“*
$E_3 = \{15\}$

Alle Ergebnisse eines Zufallsexperiments, die nicht zu einem bestimmten Ereignis E gehören, bilden das dazugehörige **Gegenereignis** $\overline{E}$. Es gilt:

$$\boldsymbol{E \cup \overline{E} = \Omega}$$

Beispiel: *Befragung in der Oberstufe*

Alter:
☐ 15
☐ 16
☒ 17
☐ 18
☐ 19
☐ 20

Ergebnismenge: $\Omega = \{15; 16; 17; 18; 19; 20\}$

$E_1 = \{18; 19; 20\} \Rightarrow \overline{E_1} = \{15; 16; 17\}$

$E_2 = \{16; 18; 20\} \Rightarrow \overline{E_2} = \{15; 17; 19\}$

$E_3 = \{15\} \Rightarrow \overline{E_3} = \{16; 17; 18; 19; 20\}$

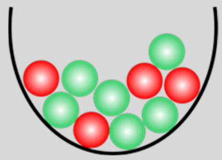
Mehrstufige Zufallsexperimente

Besteht ein Zufallsexperiment aus mehreren Teilexperimenten (Stufen) die nacheinander ausgeführt werden, so nennt man ein solches Experiment ein mehrstufiges Zufallsexperiment.

Hierbei kann es sich entweder um die wiederholte Ausführung ein und desselben Experiments oder auch um die Verknüpfung unterschiedlicher Zufallsexperimente handeln.

Beispiel:

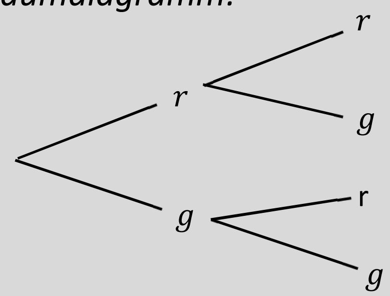
Experiment: *Einer Urne wird zweimal nacheinander jeweils eine Kugel entnommen .*



Ergebnismenge: $\Omega = \{rr, rg; gr; gg\}$

Darstellungsformen:

Baumdiagramm:



Tabellendiagramm:

		2. Zug	
		r	g
1. Zug	r	rr	rg
	g	gr	gg

Hierbei macht es einen Unterschied, ob die zuerst entnommene Kugel vor dem zweiten Zug wieder in die Urne zurückgelegt wird oder nicht!

***Ziehen mit Zurücklegen**:*
*Die Bedingungen sind bei jedem Zug identisch, die einzelnen Durchführungen sind voneinander **unabhängig**.*

***Ziehen ohne Zurücklegen**:*
*Die Bedingungen ändern sich von Zug zu Zug, die einzelnen Durchführungen sind voneinander **abhängig**.*

Kombinatorische Grundlagen

Allgemeines Zählprinzip

Besteht ein Zufallsexperiment aus n Stufen und ist die Anzahl der möglichen Ergebnisse auf den einzelnen Stufen $m_1, m_2, \ldots, m_n$, dann hat das Zufallsexperiment insgesamt $\boldsymbol{m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n}$ verschiedene Ergebnisse.

Beispiel: *In einem Schrank hängen 4 Hosen, 6 Hemden und 5 Jacken. Eine Person wählt zufällig eine Hose, ein Hemd und eine Jacke.*

(Hier gilt also: $n = 3$ und $m_1 = 4;\ m_2 = 6;\ m_3 = 5$)

Es gibt dann insgesamt $4 \cdot 6 \cdot 5 = 120$ verschiedene Kombinationen.

Permutationen

Unter einer Permutation versteht man in der Kombinatorik die Anordnung von Objekten in einer bestimmten Reihenfolge.

(1) Sind alle betrachteten Objekte unterscheidbar, so spricht man von einer *Permutation ohne Wiederholung*. Dann gibt es

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$$

verschiedene Reihenfolgen.

(1) Sind unter den n Objekten genau k Objekte nicht unterscheidbar, so spricht man von einer *Permutation mit Wiederholung*. Dann gibt es

$$\frac{n!}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1}{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 1}$$

unterscheidbare Reihenfolgen.

Beispiele:

Für die Buchstaben des „Wortes“ ***KGST*** *gibt es* $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ *Permutationen ohne Wiederholung:*

KGST, KGTS, KTSG, KTGS, KSGT, KSTG, GKST, GKTS, GSKT, GSTK, GTGS, GTSG, SKGT, SKTG, SGKT, SGTK, STKG, STGK, TKGS, TKSG, TGKS, TGSK, TSKG, TSGK

Für die Buchstaben des Wortes ***PUPPE*** *gibt es* $\frac{5!}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$ *Permutationen mit Wiederholung:*

PUPPE, PEPPU, PUEPP, PEUPP, PPUEP, PPEUP, PPUPE, PPEPU, PPPUE, PPPEU, UPPPE, EPPPU, UEPPP, EUPPP, UPEPP, EPUPP, UPPEP, EPPUP, PUPEP, PEPUP

Variation und Kombination

Aus einer Menge mit n unterscheidbaren Elementen werden k Elemente ausgewählt. Dann gilt für die Anzahl möglicher Variationen bzw. Kombinationen:

	ohne Wiederholungen	**mit Wiederholungen**
Kombinationen ohne Beachtung der Reihenfolge: $\{a, b\} = \{b, a\}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$	$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)! \cdot k!}$
Variationen mit Beachtung der Reichenfolge: $(a, b) \neq (b, a)$	$\binom{n}{k} \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!}$	n^k

Beispiele:

*Aus einer Gruppe von 20 Personen werden per Losentscheid nacheinander zwei Personen als Sprecher ausgewählt. (Die Auswahl erfolgt also **ohne Wiederholung**!)*

Betrachtet man die beiden Sprecher als Team, spielt also die Reihenfolge der Ziehungen keine Rolle, so gibt es

$$\binom{20}{2} = \frac{20!}{18! \cdot 2!} = 190$$

verschiedene Kombinationen für die Auswahl des Sprecherteams.

Bestimmt man die erstgezogene Person zum Sprecher, die zweitgezogene Person als Stellvertreter, so muss also die Reihenfolge beachtet werden. Es gibt dann

$$20 \cdot 19 = \binom{20}{2} \cdot 2! = \frac{20!}{18!} = 380$$

verschiedene Variationen für die Auswahl des Sprechers und seines Stellvertreters.

---

*Bei einer Tombola werden 20 Lose mit den Zahlen 1 bis 20 an 20 verschiedene Personen verkauft. Anschließend werden per Glücksrad (ebenfalls mit den Zahlen 1 bis 20 beschriftet) drei Gewinner ermittelt. (Die Auslosung kann also durchaus **Wiederholungen** ergeben!)*

Handelt es sich um drei identische Gewinne, spielt also die Reihenfolge der Auslosung keine Rolle, so gibt es

$$\binom{20+3-1}{3} = \frac{22!}{19! \cdot 3!} = 1540$$

verschiedene Kombinationen für die Auswahl der Gewinner.

Handelt es sich um drei unterschiedliche Gewinne, ist die Reihenfolge der Auslosung also zu beachten, gibt es

$$20^3 = 8000$$

verschiedene Variationen für die Verteilung der Gewinne auf die Gewinner.

Wahrscheinlichkeit und Wahrscheinlichkeitsverteilung

Häufigkeit

Wird ein Zufallsexperiment mit den k Ergebnissen $e_1, e_2, \dots, e_k$ in einem mehrstufigen Zufallsexperiment n – mal wiederholt durchgeführt, so nennt man die Anzahl $H_n(e_i)$, mit $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ die **absolute Häufigkeit** des Ergebnisses e_i.

Den Anteil der ermittelten absoluten Häufigkeit eines Ergebnisses an der Gesamtzahl der Durchführungen des Zufallsexperiments nennt man die **relative Häufigkeit** $h_n(e_i)$. Hier gilt also:

$$\boldsymbol{h_n(e_i) = \frac{H_n(e_i)}{n}}$$

Beispiel: *Ein Würfel wird 50 – mal nacheinander geworfen; hierbei wird insgesamt 8 – mal eine „4“ geworfen.*

Absolute Häufigkeit des Ergebnisses „4“: $H_{50}(\text{"4"}) = 8$

Relative Häufigkeit des Ergebnisses „4“: $h_{50}(\text{"4"}) = \frac{8}{50} = 0{,}16 = 16\%$

Die relative Häufigkeit ist stets eine reelle Zahl zwischen 0 und 1:

$$\boldsymbol{0 \le h_n(e_i) \le 1}$$

Von der relativen Häufigkeit zur Wahrscheinlichkeit

Bei einem Zufallsexperiment interessiert vor allem die Frage, ob es möglich ist, eine Prognose über das Auftreten eines Ergebnisses E zu machen.
Gesucht ist also die Angabe einer **Wahrscheinlichkeit $\boldsymbol{P(E)}$** für ein Ergebnis eines Zufallsexperiments. (P steht für Probability = Wahrscheinlichkeit)

Bei einem Zufallsexperiment, bei dem (z.B. aufgrund fehlender Symmetrie oder anderer Gesetzmäßigkeiten) keinerlei Vorhersage über das Auftreten der möglichen Ergebnisse gemacht werden kann, muss experimentell vorgegangen werden. Hier hilft das Empirische Gesetz der großen Zahlen:

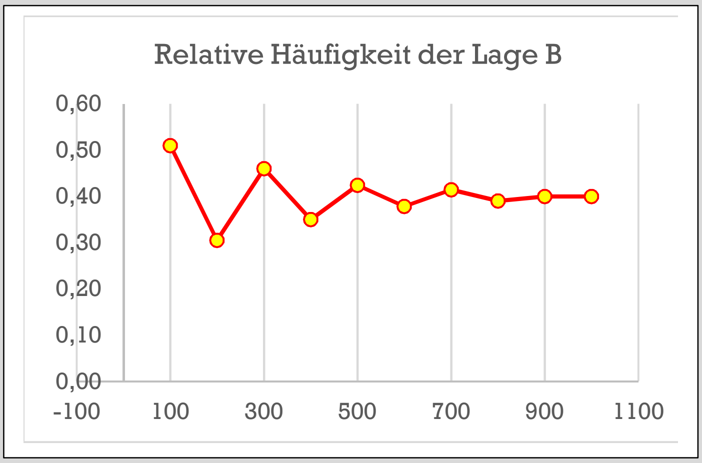
Die relativen Häufigkeiten stabilisieren sich mit wachsender Anzahl von Versuchen.

Beispiel: *Für den Wurf einer Reißzwecke gilt:*
$\Omega = \{A;\ B\}$

Lage A *Lage B*

Die Reißzwecke wurde insgesamt 1000 – mal geworfen.

Die relativen Häufigkeiten stabilisieren sich mit wachsender Anzahl der Durchführungen bei dem Wert $h_{1000}(A) \approx 0{,}40$.



Für dieses Experiment wird daraufhin festgelegt:
Die Wahrscheinlichkeit für die Lage A beträgt 0,4 (somit beträgt die Wahrscheinlichkeit für Lage B 0,6).

Mit wachsendem Stichprobenumfang stabilisieren sich die relativen Häufigkeiten eines Ergebnisses E um einen bestimmten Wert. Dieser Wert ist ein guter Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit $P(E)$ des Ergebnisses.

$$\boldsymbol{P(E) \approx \lim_{n\to\infty} h_n(E)}$$

Laplace-Wahrscheinlichkeit

Ein Zufallsexperiment, bei dem alle denkbaren Ergebnisse aufgrund einer theoretischen Annahme *gleichwahrscheinlich* sind, nennt man **Laplace-Experiment**. (PIERRE SIMON LAPLACE (1749-1827) – französischer Mathematiker)

Hat ein Laplace-Experiment die k Ergebnisse $e_1, e_2, \dots, e_k$, so ordnet man jedem Ergebnis die Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{k}$ zu. Es gilt also:

$$\boldsymbol{P(e_1) = P(e_2) = \cdots = P(e_k) = \frac{1}{k}}$$

Klassische Beispiele für Laplace-Experimente sind

der Münzwurf: $p = P(Z) = P(W) = \frac{1}{2}$

das Würfeln: $p = P(1) = P(2) = \cdots = P(6) = \frac{1}{6}$

das Glücksrad (z.B. Roulette): $p = P(0) = P(1) = \cdots = P(36) = \frac{1}{37}$

das Ziehen einer Karte aus einem Skatspiel, dann gilt für jede Karte: $p = \frac{1}{32}$

Bei Laplace-Experimenten berechnet man die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ eines Ereignisses A nach der sogenannten Laplace-Regel:

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{\text{Anzahl der zu A gehörigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}} = \frac{|A|}{|\Omega|}}$$

Beispiel: *Gleichzeitiges Werfen zweier unterscheidbarer Würfel.*

Aufgrund der Unterscheidbarkeit der Würfel ist z.B. eine Ergebnismenge Ω:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Für jedes Ergebnis gilt: $p = \frac{1}{36}$

Für das Ereignis A: „Die Summe der gewürfelten Zahlen ist 7“ gilt:

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Grundregeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Die Zuordnung, die jedem Ergebnis eines Zufallsexperiments eine Wahrscheinlichkeit zuordnet, heißt **Wahrscheinlichkeitsverteilung**.

Für ein Zufallsexperiment mit der Ergebnismenge $\Omega = \{e_1, e_2, \dots , e_n\}$ gilt:

- $P(e_1) + P(e_2) + \cdots + P(e_n) = \sum_{i=1}^{n} e_i = 1$
- für das *unmögliche* Ereignis ($E = \{\ \}$) gilt: $P(E) = 0$
- für das *sichere* Ereignis ($E = \Omega$) gilt: $P(E) = 1$
- für die Wahrscheinlichkeit des *Gegenereignisses* $\overline{E}$ eines Ereignisses E gilt: $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$ (*Komplementärregel*)
- gehören zu einem Ereignis A die k Ergebnisse $e_1, e_2, \dots , e_k$ ($k < n$), dann berechnet man die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $A = \{e_1, e_2, \dots , e_k\}$ als Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten:

  $P(A) = P(e_1) + P(e_2) + \cdots + P(e_k)$. (*Elementare Summenregel*)

- Ein Ereignis E, dessen Ergebnisse zu dem Ereignis A *oder* zu dem Ereignis B gehören, wird als **Oder-Ereignis** bezeichnet. Man schreibt: $E = A \cup B$

  Ein Ereignis E, dessen Ergebnisse zu dem Ereignis A *und* zu dem Ereignis B gehören, wird als **Und-Ereignis** bezeichnet. Man schreibt: $E = A \cap B$

  Die Wahrscheinlichkeit eines Oder-Ereignisses $A \cup B$ ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A und B vermindert um die Wahrscheinlichkeit des Und-Ereignisses $A \cap B$.

  $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$ (Allgemeine Summenregel)

Beispiel: *Am 1.2.2019 befanden sich insgesamt 240 Schülerinnen & Schüler in der Oberstufe der KGS-Tornesch. Die folgende Tabelle gibt Auskunft über die Altersstruktur:*

Alter	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*	*20*
Absolute Häufigkeit	*2*	*28*	*78*	*79*	*50*	*3*

Experiment: Eine Schülerin bzw. ein Schüler wird zufällig ausgewählt.
Ergebnismenge $\Omega = \{15; 16; 17; 18; 19; 20\}$

Wahrscheinlichkeitsverteilung :

Alter	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*	*20*
Wahrscheinlichkeit	$\frac{2}{240}$	$\frac{28}{240}$	$\frac{78}{240}$	$\frac{79}{240}$	$\frac{50}{240}$	$\frac{3}{240}$

A *: „Die gewählte Person ist volljährig."*
B *: „Die gewählte Person ist minderjährig."*
C *: „Das Alter der gewählten Person ist eine gerade Zahl."*

$$P(A) = P(18) + P(19) + P(20) = \frac{79+50+3}{240} = \frac{11}{20} = 55{,}0\ \%$$

$$P(B) = P\left(\overline{A}\right) = 1 - \frac{11}{20} = \frac{9}{20} = 45{,}0\ \%$$

$$P(C) = P(16) + P(18) + P(20) = \frac{28+79+3}{240} = \frac{11}{24} \approx 45{,}8\ \%$$

$$P(A \cap C) = P(18) + P(20) = \frac{79+3}{240} = \frac{41}{120} \approx 34{,}2\ \%$$

$$P(A \cup C) = P(16) + P(18) + P(19) + P(20) = \frac{28+79+50+3}{240} = \frac{2}{3} \approx 66{,}7\ \%$$

oder nach der allgemeinen Summenregel berechnet:

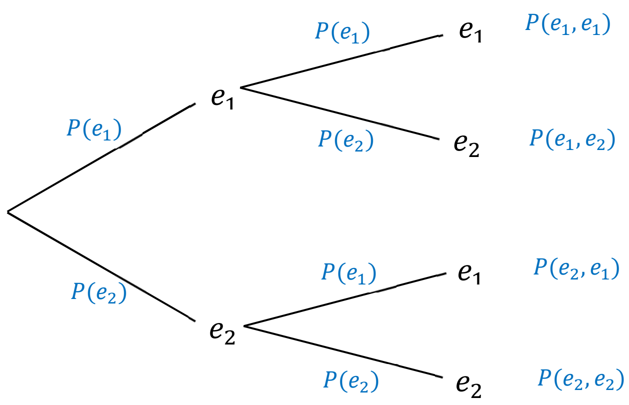
$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = \frac{11}{20} + \frac{11}{24} - \frac{41}{120} = \frac{2}{3} \approx 66{,}7\ \%$$

Rechenregeln für mehrstufige Zufallsexperimente

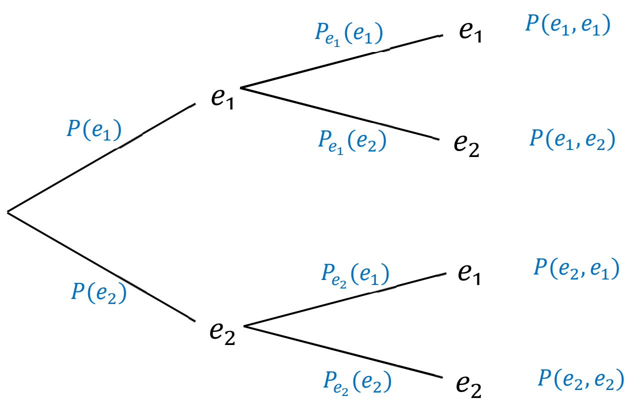
Um eine Übersicht über die Wahrscheinlichkeitsverteilung mehrstufiger Zufallsexperimente (vgl. Seite 3) zu erhalten, notiert man an die *Pfade* des zugehörigen Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten, mit denen die einzelnen Ergebnisse in den verschiedenen Stufen auftreten. An das Ende der Pfade notieren wir zudem die (gesuchten) Gesamtwahrscheinlichkeiten:

Wird ein Zufallsexperiment mit den Ergebnissen e_1 und e_2 zweimal nacheinander ausgeführt ergibt sich folgendes Bild:

(1) die beiden Stufen sind unabhängig voneinander



(2) die beiden Stufen sind abhängig voneinander



Mit $P_{e_1}(e_2)$ ist hierbei z.B. die Wahrscheinlichkeit von e_2 unter der Voraussetzung, dass bereits vorher das Ergebnis e_1 eingetreten ist, gemeint.

Will man Anteile von Anteilen bestimmen, muss man die Anteile miteinander multiplizieren.

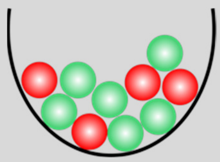
Dies führt zu der sogenannten **Pfadregel:**

Bei einem mehrstufigen Zufallsexperiment ist die Wahrscheinlichkeit eines (durch einen Pfad dargestellten) Ergebnisses gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang des zugehörigen Pfades.

Auch bei einem mehrstufigen Zufallsexperiment setzt sich ein Ereignis aus verschiedenen zugehörigen Ergebnissen zusammen. Die elementare Summenregel für Ereignisse führt hier zu der sogenannten **Additionsregel** für mehrstufige Zufallsexperimente:

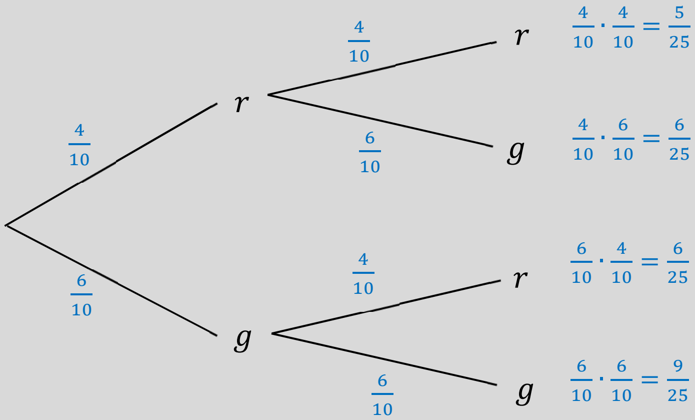
Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses wird durch Addition der zugehörigen Pfadergebnisse gebildet.

Beispiel: *Der abgebildeten Urne wird zweimal nacheinander jeweils eine Kugel entnommen .*



Ergebnismenge: $\Omega = \{rr, rg; gr; gg\}$

(1) Ziehen mit Zurücklegen – die Ziehungen sind voneinander unabhängig



Wahrscheinlichkeitsverteilung:

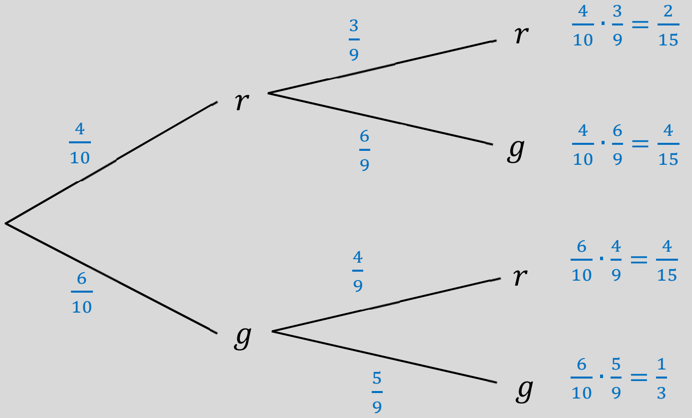
Ergebnis	rr	rg	gr	gg
Wahrscheinlichkeit	$\frac{5}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{9}{25}$

Für das Ereignis A :
„Die beiden gezogenen Kugeln haben die gleiche Farbe“ gilt:

$$P(A) = P(rr) + P(gg) = \frac{5}{25} + \frac{9}{25} = \frac{14}{25} = 56\ \%$$

---

(2) Ziehen ohne Zurücklegen – die Ziehungen sind voneinander abhängig



Wahrscheinlichkeitsverteilung:

Ergebnis	rr	rg	gr	gg
Wahrscheinlichkeit	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{3}$

Für das Ereignis A :
„Die beiden gezogenen Kugeln haben die gleiche Farbe“ gilt nun:

$$P(A) = P(rr) + P(gg) = \frac{2}{15} + \frac{1}{3} = \frac{7}{15} = 46,\overline{6}\ \%$$