# METRISCHE GEOMETRIE

## Abstände und Winkel

Hartmut Meyer
https://mathemeyer.com

# Inhalt

## Grundlagen - Verknüpfungen

Für die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ und eine reelle Zahl $r$ gilt:

**I. Die Vektoraddition**

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

**II. Die Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl**

$$r \cdot \vec{a} = r \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_1 \\ r \cdot a_2 \\ r \cdot a_3 \end{pmatrix}$$

**III. Das Skalarprodukt zweier Vektoren**

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

→ Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist stets eine reelle Zahl!

→ Zwei orthogonale Vektoren haben das Skalarprodukt null.

$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \bullet \vec{b} = 0$

**IV. Das Kreuzprodukt (Vektorprodukt) zweier Vektoren**

Für zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ gilt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

→ Das Kreuzprodukt zweier Vektoren ist stets ein Vektor!

→ Es gilt: $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}$ und $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$.

## Der Abstand zwischen zwei Punkten im Raum

Der Abstand zweier Punkte $A(a_1|a_2|a_3)$ und $B(b_1|b_2|b_3)$ entspricht dem Betrag des Vektors $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$.

$$\boldsymbol{d(A,B) = \left|\begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}}$$

***Beispiel:***

*Mit* $A(2|-5|9)$ *und* $B(-4|-3|6)$ *gilt:*

$$d(A,B) = \left|\begin{pmatrix} -4-2 \\ -3-(-5) \\ 6-9 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right|$$

$$= \sqrt{(-6)^2 + 2^2 + (-3)^2} = 7\ LE$$

## Der Abstand zwischen einem Punkt und einer Ebene im Raum

Für den Abstand des Punktes $A(a_1|a_2|a_3)$ und der Ebene $E: \left[\vec{x} - \overrightarrow{OP}\right] \bullet \vec{n} = 0$ gilt:

$$\boldsymbol{d(A,E) = \left|\left[\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP}\right] \bullet \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n}\right|}$$

***Beispiel:***

*Mit* $A(2|-1|4)$ *und* $E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$ *gilt:*

$$d(A,E) = \left|\left[\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}\right] \bullet \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}\right|$$

$$= \left|\frac{1}{6} \cdot \left[\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}\right]\right|$$

$$= \left|\frac{1}{6} \cdot (-12 - 6 - 36)\right| = 9\ LE$$

## Der Abstand zwischen zwei parallelen Ebenen im Raum

Der Abstand zwischen den beiden parallelen Ebenen $E_1: \left[\vec{x} - \overrightarrow{OP}\right] \bullet \vec{n}_1 = 0$

und $E_2: \left[\vec{x} - \overrightarrow{OQ}\right] \bullet \vec{n}_2 = 0$ $(\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2)$ entspricht dem Abstand des Punktes $P$ von $E_2$ (bzw. $Q$ von $E_1$) , da alle Punkte der Ebene $E_1$ den gleichen Abstand zur Ebene $E_2$ haben (dies gilt auch umgekehrt).

$$\boldsymbol{d(E_1,\ E_2) = d(P, E_2) = \left|\left[\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}\right] \bullet \frac{1}{|\vec{n}_2|} \cdot \vec{n}_2\right|}$$

## Der Abstand zwischen einem Punkt und einer Geraden im Raum

Der Abstand eines Punktes $A(a_1|a_2|a_3)$ von einer Geraden $g: \vec{x} = \vec{p} + \mu \cdot \vec{v}$ entspricht dem Betrag des Vektors $\overrightarrow{AF}$, wobei $F$ der Fußpunkt des Lotes von $A$ auf $g$ ist.

Bei der Berechnung von $F$ kann man folgendermaßen vorgehen:

(1) Erstelle eine Lotebene $L$ zur Geraden $g$ durch den Punkt $A$.
→ $L: \left[\vec{x} - \overrightarrow{OA}\right] \bullet \vec{v} = 0$

(2) Berechne den Durchstoßpunkt der Geraden $g$ mit der Ebene $L$.
→ Ansatz: $\left[\vec{p} + \mu \cdot \vec{v} - \overrightarrow{OA}\right] \bullet \vec{v} = 0$
→ Das hierdurch berechnete $\mu$ wird in den Geradenterm eingesetzt, es ergibt sich der Vektor $\overrightarrow{OF}$.

Schließlich gilt dann: $\boldsymbol{d(A,g) = \left|\overrightarrow{AF}\right|}$.

***Beispiel:*** $A(2|-3|5)$ *und* $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

*(1) Lotebene zu $g$ durch $A$:* $L: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

*(2) Lotfußpunkt $F$ berechnen:*

$$\left[\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 + 6 + 2 + \mu \cdot (4 + 1 + 1) = 0 \;\Leftrightarrow \cdots \;\Leftrightarrow\; \mu = -2$$

$$\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow F(0|1|5)$$

$$d(A,g) = \left|\overrightarrow{AF}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4 + 16 + 0} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}\ LE$$

## Der Abstand zwischen zwei parallelen Geraden im Raum

Der Abstand zwischen den (echt) parallelen Geraden $g_1: \vec{x} = \vec{p} + \mu \cdot \vec{v}$ und $g_2: \vec{x} = \vec{q} + \lambda \cdot \vec{w}$ $(\vec{v} \parallel \vec{w})$ entspricht dem Abstand des Punktes $P$ von der Geraden $g_2$ (bzw. $Q$ von $g_1$) , da alle Punkte der Geraden $g_1$ den gleichen Abstand zur Geraden $g_2$ haben (dies gilt auch umgekehrt).

$$\boldsymbol{d(g_1, g_2) = d(P, g_2)}$$

---

## Der Abstand zwischen zwei windschiefen Geraden im Raum

Für den Abstand zwischen den windschiefen Geraden $g_1: \vec{x} = \vec{p} + \lambda \cdot \vec{v}$ und $g_2: \vec{x} = \vec{q} + \mu \cdot \vec{w}$ $(\vec{v} \nparallel \vec{w})$ gilt:

$$\boldsymbol{d(g_1, g_2) = \left| [\vec{p} - \vec{q}] \bullet \frac{1}{|\vec{v} \times \vec{w}|} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) \right|}$$

**Beispiel:** $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Mit $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 17 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\left| \begin{pmatrix} 10 \\ 17 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{100 + 289 + 1} = \sqrt{390}$ gilt:

$$\begin{aligned} d(g_1, g_2) &= \left| \left[ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right] \bullet \frac{1}{\sqrt{390}} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 17 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{390}} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 10 \\ 17 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \right| \\ &= \left| \frac{30 - 34 + 1}{\sqrt{390}} \right| = \frac{3}{\sqrt{390}} \ LE \end{aligned}$$

## Der Winkel zwischen zwei Vektoren im Raum

Für den Winkel $\alpha$ zwischen den beiden Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ gilt:

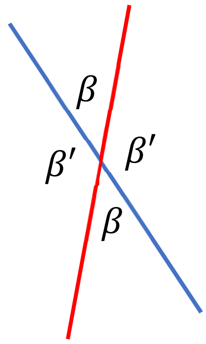
$$\boldsymbol{cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2} \cdot \sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2}}}$$

***Beispiel:*** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\alpha = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

$$cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}\right|} = \frac{12 - 5 + 12}{\sqrt{53} \cdot \sqrt{38}} = \frac{19}{\sqrt{2014}}$$

$$arccos\left(\frac{19}{2014}\right) \approx 65{,}0°$$

## Der Winkel zwischen zwei Geraden im Raum




Schneiden sich zwei Geraden, so entstehen vier Winkel.
Je zwei der Größe $\beta$ und je zwei der Größe $\beta'$.
Es gilt hierbei: $\beta' = 180° - \beta$. Im Allgemeinen wird mit dem Schnittwinkel zweier Geraden der Winkel bezeichnet, der kleiner oder gleich 90° ist.

Für den Schnittwinkel $\beta$ zwischen der Geraden $g_1: \vec{x} = \vec{p} + \mu \cdot \vec{v}$ und der Geraden $g_2: \vec{x} = \vec{q} + \lambda \cdot \vec{w}$ gilt:

$$\boldsymbol{cos(\beta)} = \frac{|\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{w}}|}{|\vec{\boldsymbol{v}}| \cdot |\vec{\boldsymbol{w}}|}$$

→ Durch die Betragsstriche im Zähler des Bruches ergibt sich automatisch der richtige Schnittwinkel $\beta$!

***Beispiel:*** $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ *und* $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

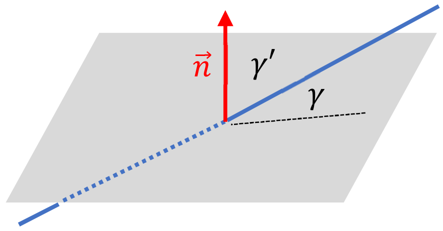
$\beta = \sphericalangle(g_1, g_2)$

*Ohne Rechnung: Die Geraden schneiden sich in dem Punkt* $(3|4|1)$.

$$cos(\beta) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|-2+3+2|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{84}}$$

$$arccos\left(\frac{3}{\sqrt{84}}\right) \approx 70{,}9°$$

## Der Winkel zwischen einer Geraden und einer Ebene im Raum




Zur Berechnung des Schnittwinkels $\gamma$ zwischen einer Geraden $g: \vec{x} = \vec{p} + \mu \cdot \vec{v}$ und einer Ebene $E: [\vec{x} - \vec{q}] \bullet \vec{n} = 0$ bestimmt man zunächst den Winkel $\gamma'$ zwischen dem Richtungsvektor $\vec{v}$ der Geraden und dem Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene.
Es gilt dann: $\gamma = 90° - \gamma'$.

Es gilt zunächst: $\quad cos(\gamma') = \dfrac{|\vec{v} \bullet \vec{n}|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|}$ und $\gamma = 90° - \gamma'$.

Wegen des Zusammenhangs $cos(90° - \gamma) = sin(\gamma)$ gilt (einfacher) für den Schnittwinkel $\gamma$ :

$$\boldsymbol{sin(\gamma) = \frac{|\vec{v} \bullet \vec{n}|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|}}$$

***Beispiel:*** $\quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *und* $E: 7x_1 - x_2 + 5x_3 - 24 = 0$

*Es gilt:* $\overrightarrow{RV_g} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$. $\gamma = \sphericalangle(g, E)$

$$sin(\gamma) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|7 + 1 + 10|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{75}} = \frac{18}{\sqrt{450}}$$

$$arcsin\left(\frac{18}{\sqrt{450}}\right) \approx 58{,}1°$$

## Der Winkel zwischen zwei Ebenen im Raum

Der Schnittwinkel $\delta$ zwischen zwei sich schneidenden Ebenen $E_1\colon [\vec{x}-\vec{p}]\bullet\vec{n}_1=0$ und $E_2\colon [\vec{x}-\vec{q}]\bullet\vec{n}_2=0$ entspricht dem Winkel zwischen den beiden Normalenvektoren $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ der beiden Ebenen.

$$\boldsymbol{cos(\delta)} = \frac{|\vec{\boldsymbol{n}}_1\bullet\vec{\boldsymbol{n}}_2|}{|\vec{\boldsymbol{n}}_1|\cdot|\vec{\boldsymbol{n}}_2|}$$

***Beispiel:*** $E_1\colon \left[\vec{x}-\begin{pmatrix}8\\2\\6\end{pmatrix}\right]\bullet\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}=0$ *und* $E_2\colon -3x_1+x_2+x_3-7=0$

*Es gilt:* $\vec{n}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ *und* $\vec{n}_2=\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$. $\delta=\sphericalangle(E_1,E_2)$

$$cos(\delta)=\frac{\left|\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}\right|}=\frac{|-6+1-1|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{11}}=\frac{6}{\sqrt{66}}$$

$$arccos\left(\frac{6}{\sqrt{66}}\right)\approx 42{,}4°$$