# FUNKTIONEN

## Trigonometrische Funktionen

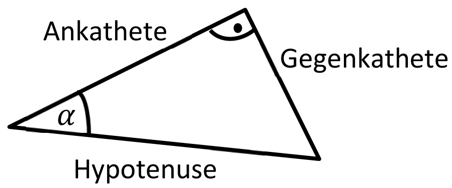
Hartmut Meyer

https://mathemeyer.com

# Inhalt

## Grundlagen aus der Sekundarstufe I

**Verhältnisse im rechtwinkligen Dreieck:**

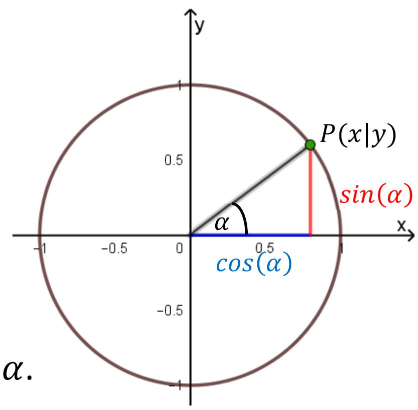



In allen rechtwinkligen Dreiecken, die in einem spitzen Winkel $\alpha$ übereinstimmen, sind die Verhältnisse entsprechender Seiten stets gleich.

Für die drei klassischen Verhältnisse wird definiert:

| | |
|---|---|
| $sin(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Hypothenuse}$ | (lies: *Sinus* von $\alpha$) |
| $cos(\alpha) = \frac{Ankathete}{Hypothenuse}$ | (lies: *Kosinus* von $\alpha$) |
| $tan(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$ | (lies: *Tangens* von $\alpha$) |

**Anschauung am Einheitskreis:**

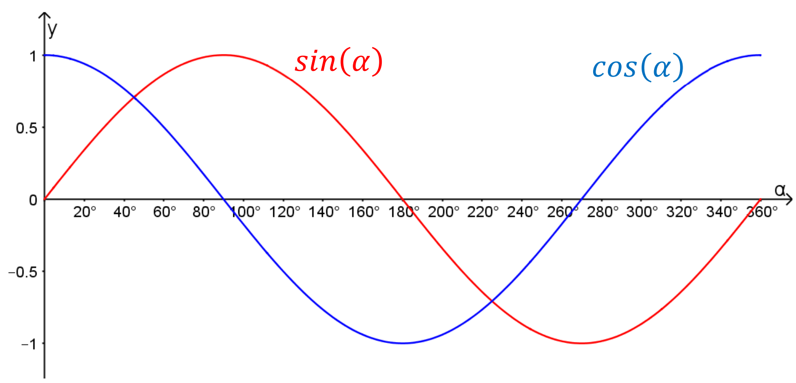



Im Einheitskreis (ein Kreis mit dem Radius 1 und dem Mittelpunkt $(0|0)$) können die Sinus- und Kosinuswerte veranschaulicht werden:

Zu jedem Punkt $P(x|y)$ auf dem Kreis kann ein Radius, vom Mittelpunkt ausgehend, gezeichnet werden. Hierdurch entsteht ein rechtwinkliges Dreieck mit dem spitzen Winkel $\alpha$.

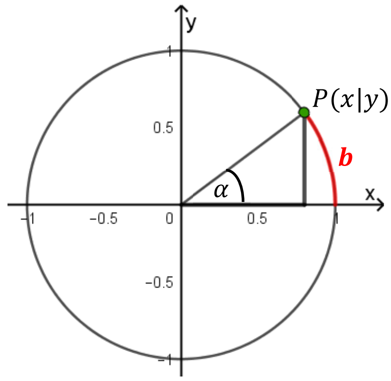
Die Streckenlänge $x$ entspricht hierbei dem Kosinuswert, die Streckenlänge $y$ dem Sinuswert des Winkels $\alpha$, da die Hypotenuse des Dreiecks die Länge 1 hat:
$sin(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Hypothenuse} = \frac{y}{1} = y$ und $cos(\alpha) = \frac{Ankathete}{Hypothenuse} = \frac{x}{1} = x$.

Überträgt man die entsprechenden Längen in ein Koordinatensystem, so ergibt sich folgendes Bild der trigonometrischen Funktionen $sin(\alpha)$ bzw. $cos(\alpha)$:



**Die trigonometrischen Funktionen im Bogenmaß:**

Jeder Winkel $\alpha$ kann auch im sogenannten Bogenmaß angegeben werden. Misst man den Winkel im Bogenmaß, so ordnet man dem Gradmaß von $\alpha$ die Länge des Kreisbogens $b$ zu. Hierbei gilt allgemein: $b = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r$.




Fasst man jede reelle Zahl $x$ als Bogenmaß eines Winkels auf, so werden hierdurch die Funktionen $f(x) = sin(x)$ bzw. $g(x) = cos(x)$ für alle reellen Zahlen definiert.

***Beispiel:*** $\alpha = 60°$

$sin(60°) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \approx 0{,}87$

*(Gradmaß: Taschenrechner auf „D“ / „Deg“ stellen!)*

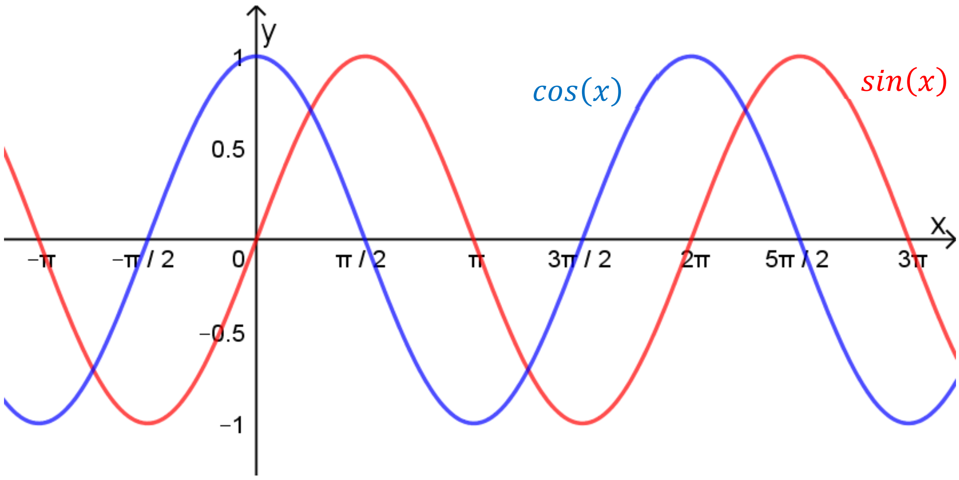
*Die Umrechnung in das Bogenmaß (im Einheitskreis gilt $r = 1$) ergibt:*

$$x = \frac{60°}{360°} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{3}$$

$sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \approx 0{,}87$

*(Bogenmaß: Taschenrechner auf „R“ / „Rad“ stellen!)*

Die Graphen der Sinus- und Kosinusfunktion haben (im Bogenmaß) dann folgendes Aussehen:




**Spezielle Funktionswerte der Winkelfunktionen:**

| *Gradmaß* | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 120° | 135° | 150° | 180° | 225° | 270° | 360° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Bogen-maß x* | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
| $sin(x)$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $1$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $-1$ | $0$ |
| $cos(x)$ | $1$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $-1$ | $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $0$ | $1$ |

## Zusammenhänge zwischen den trigonometrischen Funktionen

(1) Der Graph der Kosinusfunktion entsteht durch Verschiebung des Graphen der Sinusfunktion um $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ in $x$ – Richtung:

$$cos(x) = sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

---

(2) Die Tangensfunktion entspricht dem Quotienten der Sinus- und der Kosinusfunktion:

$$tan(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}$$

---

(3) Es gilt der sogenannte *trigonometrische Pythagoras*:

$$sin^2(x) + cos^2(x) = 1$$

---

(4) Es gelten die sogenannten *Additionstheoreme*:

$$sin(x + y) = sin(x) \cdot cos(y) + cos(x) \cdot sin(y)$$

$$cos(x + y) = cos(x) \cdot cos(y) - sin(x) \cdot sin(y)$$

$$tan(x + y) = \frac{tan(x) + tan(y)}{1 - tan(x) \cdot tan(y)}$$

Weitere Zusammenhänge können der Formelsammlung entnommen werden.

## Eigenschaften der Sinus- und Kosinusfunktion

| | **Sinusfunktion:** $f(x) = sin(x)$ | **Kosinusfunktion:** $g(x) = cos(x)$ |
|---|---|---|
| Definitionsbereich | alle reellen Zahlen ($\mathbb{R}$) | alle reellen Zahlen ($\mathbb{R}$) |
| Wertebereich | $[\mathbf{-1}; \mathbf{1}]$, also: $-1 \leq sin(x) \leq 1$ | $[\mathbf{-1}; \mathbf{1}]$, also: $-1 \leq cos(x) \leq 1$ |
| Periodizität | Periode $\boldsymbol{2\pi}$ $sin(x) = sin(x + k \cdot 2\pi)\ ;\ k \in \mathbb{Z}$ | Periode $\boldsymbol{2\pi}$ $cos(x) = cos(x + k \cdot 2\pi)\ ; k \in \mathbb{Z}$ |
| Symmetrie | **punktsymmetrisch** zum Ursprung: $sin(-x) = -sin(x)$ | **achsensymmetrisch** zur $y$-Achse: $cos(-x) = cos(x)$ |
| Nullstellen | $\boldsymbol{k \cdot \pi}\ ;\ k \in \mathbb{Z}$ | $\boldsymbol{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi}\ ;\ k \in \mathbb{Z}$ |
| Ableitungen | $f'(x) = \boldsymbol{cos(x)}$ | $g'(x) = \boldsymbol{-sin(x)}$ |
| Stammfunktion | $\int sin(x) = \boldsymbol{-cos(x) + c}$ | $\int cos(x) = \boldsymbol{sin(x) + c}$ |

## Variationen der Sinusfunktion

Im Folgenden werden die Auswirkungen der Parameter $a, b, c$ und $d$ der Funktion

$$f(x) = a \cdot sin(b \cdot x + c) + d\,; \quad a, b \neq 0$$

auf den Graphen der Sinusfunktion betrachtet:

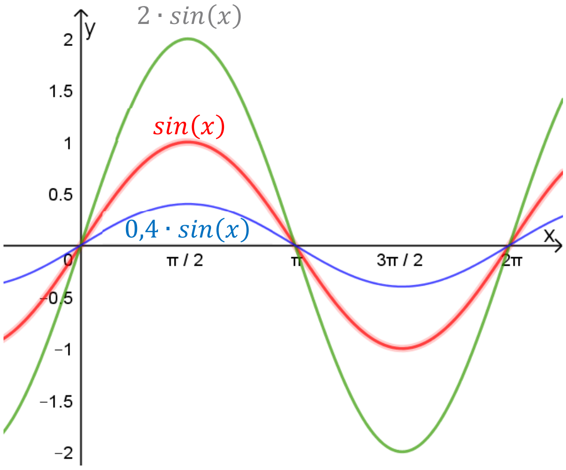
**Die Funktion $\boldsymbol{f_1(x) = a \cdot sin(x)}$ ; $a \neq 0$**

Der Faktor $a$ verändert die vertikale Ausdehnung (die **Amplitude**) des Funktionsgraphen. Es gilt:

$|a| > 1 \rightarrow$ Streckung in $y$ - Richtung

$|a| < 1 \rightarrow$ Stauchung in $y$ - Richtung

Die Periode und die Lage der Nullstellen ändern sich nicht!

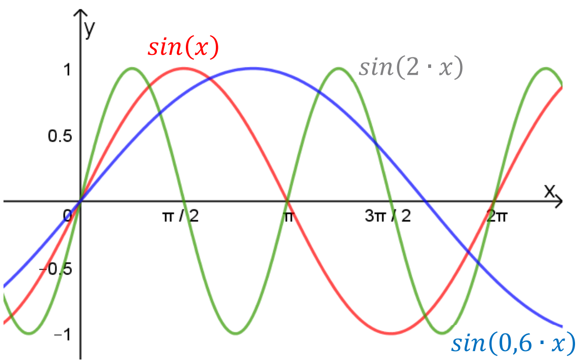



**Die Funktion $\boldsymbol{f_2(x) = sin(b \cdot x)}$ ; $b \neq 0$**

Der Faktor $b$ verändert die horizontale Ausdehnung (die **Frequenz**) des Funktionsgraphen. Es gilt:

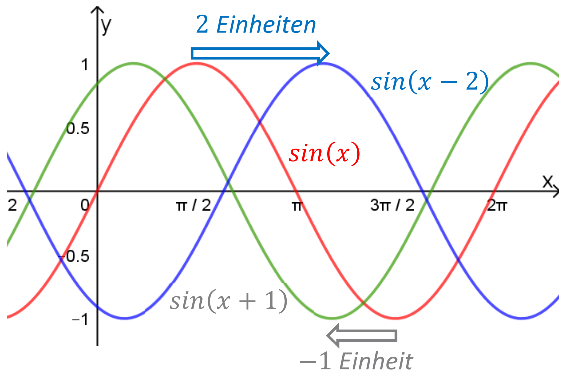
$|b| < 1 \rightarrow$ Streckung in $x$ - Richtung

$|b| > 1 \rightarrow$ Stauchung in $x$ - Richtung




Die Periode beträgt nun $\frac{1}{|b|} \cdot 2\pi$, die Nullstellen liegen nun bei $\frac{1}{b} \cdot k\pi\,; \quad k \in \mathbb{Z}$.

## Die Funktion $f_3(x) = sin(x + c)$



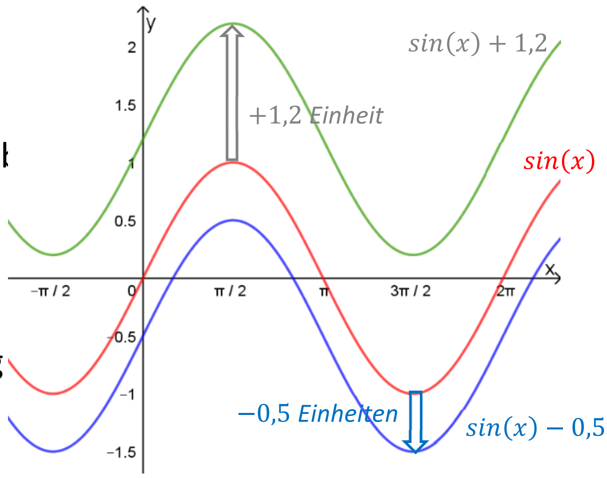

Der Summand $c$ bewirkt eine horizontale Verschiebung (Phasenverschiebung) des Funktionsgraphen in $x$ – Richtung. Es gilt:

$c < 0$ → Verschiebung in positive $x$ - Richtung

$c > 0$ → Verschiebung in negative $x$ - Richtung

Die Periode ändert sich nicht, die Nullstellen liegen nun bei $k\pi - c$ ; $k \in \mathbb{Z}$.

## Die Funktion $f_4(x) = sin(x) + d$




Der Summand $d$ bewirkt eine vertikale Verschiel
$y$ – Richtung. Es gilt:

$d > 0$ → Verschiebung in positive $y$ - Richtung

$d < 0$ → Verschiebung in negative $y$ - Richtung

Die Periode ändert sich nicht.

Nullstellen existieren nur für $|d| \leq 1$. Nur dann gilt:

$sin(x) + d = 0$
$\Leftrightarrow sin(x) = -d$
$\Leftrightarrow x = arcsin(-d) \;\vee\; x = \pi - arcsin(-d)$
Da die Periode unverändert $2\pi$ beträgt, haben die Nullstellen also die Lage
$\Leftrightarrow x = arcsin(-d) + 2k\pi \;\vee\; x = \pi - arcsin(-d) + 2k\pi$

**Beispiel :** $f(x) = sin(x) - 0{,}5$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow sin(x) - 0{,}5$
$\Leftrightarrow sin(x) = 0{,}5$
$\Leftrightarrow x = arcsin(0{,}5) + 2k\pi \vee x = \pi - arcsin(0{,}5) + 2k\pi$

Für $k = 0$ gilt: $x = \frac{1}{6}\pi \;\vee\; x = \frac{5}{6}\pi$

Für $k = 1$ gilt: $x = \frac{13}{6}\pi \;\vee\; x = \frac{17}{6}\pi$ u.s.w

## Beispiel einer Kurvendiskussion

Betrachtet wird die Funktion $f(x) = 3 \cdot sin\big(2 \cdot (x-1)\big) - 1$
im Intervall $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

**Achsenschnittpunkte:**

(1) Schnittpunkt mit der $f(x)$ – Achse:
$f(0) = 3 \cdot sin(-2) - 1 \approx -3{,}7 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{S_y(0|-3,7)}$
(2) Schnittpunkte mit der $x$ – Achse: $f(x) = 0$
$3 \cdot sin\big(2 \cdot (x-1)\big) - 1 = 0$
$\Leftrightarrow sin(2x-2) = \frac{1}{3}$ / Substitution: $2x - 2 = z$
$\Leftrightarrow z = arcsin\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0{,}34 \;\vee\; z = \pi - arcsin\left(\frac{1}{3}\right) \approx 2{,}80$
$\Rightarrow 2x - 2 \approx 0{,}34 \;\vee\; 2x - 2 \approx 2{,}80$
$\Leftrightarrow x \approx 1{,}17 \;\vee\; x \approx 2{,}40$
Die Periode beträgt: $\frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi$, also lauten die Nullstellen:
$x_n \approx 1{,}17 + k\pi \;\vee\; x_n \approx 2{,}40 + k\pi$
$k = 0$: $x_n \approx 1{,}17 \;\vee\; x_n \approx 2{,}40$
$k = 1$: $x_n \approx 4{,}31 \;(\vee\; x_n \approx 5{,}54)$
Die Nullstellen innerhalb des Intervalls $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$ lauten:
$\boldsymbol{N_1(1,17|0)}, \boldsymbol{N_2(2,40|0)}$ und $\boldsymbol{N_3(4,31|0)}$

**Extrempunkte:**

Ableitungen: $f'(x) = 6 \cdot cos(2x-2)$; $f''(x) = -12 \cdot sin(2x-2)$
Notw.Bed.: $f'(x_E) = 0$
$\Rightarrow 6 \cdot cos(2x-2) = 0 \Leftrightarrow cos(2x-2) = 0$
$\Leftrightarrow 2x - 2 = \frac{\pi}{2} + k\pi$
$\Leftrightarrow x = 1 + \frac{\pi}{4} + \frac{k}{2}\pi$
$k = -1$: $x_E = 1 - \frac{\pi}{4} \approx 0{,}21$
$k = 0$: $x_E = 1 + \frac{\pi}{4} \approx 1{,}79$
$k = 1$: $x_E = \frac{3\pi}{4} \approx 3{,}36$
Hinr.Bed.: $f'(x_E) = 0 \;\wedge f''(x_E) \neq 0$
$f''(0{,}21) \approx 12{,}0 \neq 0$; $f''(1{,}79) \approx -12{,}0 \neq 0$; $f''(3{,}36) \approx 12{,}0 \neq 0$

$f(0{,}21) \approx -4{,}00 \;\Rightarrow \boldsymbol{T_1(0{,}21|-4{,}00)}$
$f(1{,}79) \approx 2{,}00 \;\Rightarrow \boldsymbol{H(1{,}79|2{,}00)}$
$f(3{,}36) \approx -4{,}00 \;\Rightarrow \boldsymbol{T_2(3{,}36|-4{,}00)}$

**Wendepunkte:**

3.Ableitung: $f'''(x) = -24 \cdot cos(2x-2)$
Notw.Bed.: $f''(x_w) = 0$
$-12 \cdot sin(2x-2) = 0 \Leftrightarrow sin(2x-2) = 0$
$\Leftrightarrow 2x - 2 = k\pi$
$\Leftrightarrow x = 1 + \frac{k}{2}\pi$
$k = 0$: $x_w = 1$
$k = 1$: $x_w = 1 + \frac{\pi}{2} \approx 2{,}57$
$k = 2$: $x_w = 1 + \pi \approx 4{,}14$
Hinr.Bed.: $f''(x_w) = 0 \wedge f'''(x_w) \neq 0$
$f'''(1) = -24 \neq 0;\; f'''(2{,}57) \approx -24 \neq 0;\; f''(4{,}14) = -24 \neq 0$

$f(1) = -1 \;\Rightarrow \boldsymbol{W_1(1|-1)}$
$f(2{,}57) = -1 \;\Rightarrow \boldsymbol{W_2(2{,}57|-1)}$
$f(4{,}14) = -1 \;\Rightarrow \boldsymbol{W_3(4{,}14|-1)}$

**Funktionsgraph:**