



FUNKTIONEN

Trigonometrische Funktionen

Hartmut Meyer
<https://mathemeyer.com>

Inhalt

Grundlagen aus der Sekundarstufe I

Verhältnisse im rechtwinkligen Dreieck.....	2
Anschauung am Einheitskreis.....	2
Die trigonometrischen Funktionen im Bogenmaß.....	3
Spezielle Funktionswerte der Winkelfunktionen.....	4

Die reellen Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$

Zusammenhänge zwischen den trigonometrischen Funktionen.....	5
Eigenschaften der Sinus- und Kosinusfunktion.....	6

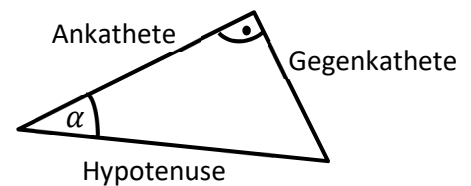
Variationen der Sinusfunktion

Die Funktion $f(x) = a \cdot \sin(x)$	7
Die Funktion $f(x) = \sin(b \cdot x)$	7
Die Funktion $f(x) = \sin(x + c)$	8
Die Funktion $f(x) = \sin(x) + d$	8
Beispiel einer Kurvendiskussion.....	9

Grundlagen aus der Sekundarstufe I

Verhältnisse im rechtwinkligen Dreieck:

In allen rechtwinkligen Dreiecken, die in einem spitzen Winkel α übereinstimmen, sind die Verhältnisse entsprechender Seiten stets gleich.



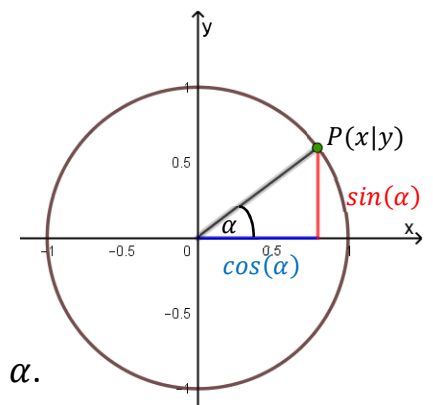
Für die drei klassischen Verhältnisse wird definiert:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} && \text{(lies: Sinus von } \alpha) \\ \cos(\alpha) &= \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} && \text{(lies: Kosinus von } \alpha) \\ \tan(\alpha) &= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} && \text{(lies: Tangens von } \alpha) \end{aligned}$$

Anschauung am Einheitskreis:

Im Einheitskreis (ein Kreis mit dem Radius 1 und dem Mittelpunkt $(0|0)$) können die Sinus- und Kosinuswerte veranschaulicht werden:

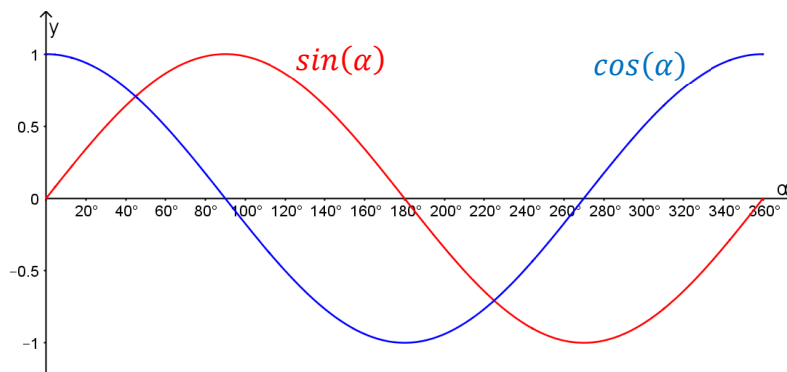
Zu jedem Punkt $P(x|y)$ auf dem Kreis kann ein Radius, vom Mittelpunkt ausgehend, gezeichnet werden. Hierdurch entsteht ein rechtwinkliges Dreieck mit dem spitzen Winkel α .



Die Streckenlänge x entspricht hierbei dem Kosinuswert, die Streckenlänge y dem Sinuswert des Winkels α , da die Hypotenuse des Dreiecks die Länge 1 hat:

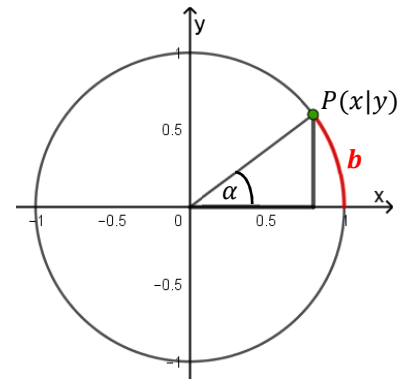
$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{y}{1} = y \quad \text{und} \quad \cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{x}{1} = x.$$

Überträgt man die entsprechenden Längen in ein Koordinatensystem, so ergibt sich folgendes Bild der trigonometrischen Funktionen $\sin(\alpha)$ bzw. $\cos(\alpha)$:



Die trigonometrischen Funktionen im Bogenmaß:

Jeder Winkel α kann auch im sogenannten Bogenmaß angegeben werden. Misst man den Winkel im Bogenmaß, so ordnet man dem Gradmaß von α die Länge des Kreisbogens b zu. Hierbei gilt allgemein: $b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$.



Fasst man jede reelle Zahl x als Bogenmaß eines Winkels auf, so werden hierdurch die Funktionen $f(x) = \sin(x)$ bzw. $g(x) = \cos(x)$ für alle reellen Zahlen definiert.

Beispiel: $\alpha = 60^\circ$

$$\sin(60^\circ) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \approx 0,87$$

(Gradmaß: Taschenrechner auf „D“ / „Deg“ stellen!)

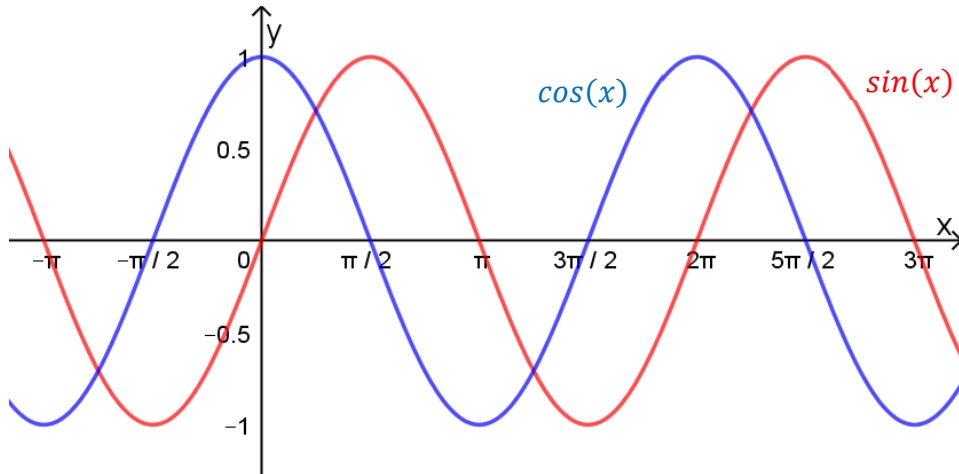
Die Umrechnung in das Bogenmaß (im Einheitskreis gilt $r = 1$) ergibt:

$$x = \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{3}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \approx 0,87$$

(Bogenmaß: Taschenrechner auf „R“ / „Rad“ stellen!)

Die Graphen der Sinus- und Kosinusfunktion haben (im Bogenmaß) dann folgendes Aussehen:



Spezielle Funktionswerte der Winkelfunktionen:

<i>Gradmaß</i>	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	225°	270°	360°
<i>Bogenmaß x</i>	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
<i>sin(x)</i>	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1	0
<i>cos(x)</i>	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	1

Zusammenhänge zwischen den trigonometrischen Funktionen

- (1) Der Graph der Kosinusfunktion entsteht durch Verschiebung des Graphen der Sinusfunktion um $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ in x – Richtung:

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

- (2) Die Tangensfunktion entspricht dem Quotienten der Sinus- und der Kosinusfunktion:

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

- (3) Es gilt der sogenannte *trigonometrische Pythagoras*:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

- (4) Es gelten die sogenannten *Additionstheoreme*:

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y)$$

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x) \cdot \tan(y)}$$

Weitere Zusammenhänge können der Formelsammlung entnommen werden.

Eigenschaften der Sinus- und Kosinusfunktion

	Sinusfunktion: $f(x) = \sin(x)$	Kosinusfunktion: $g(x) = \cos(x)$
Definitionsbereich	alle reellen Zahlen (\mathbb{R})	alle reellen Zahlen (\mathbb{R})
Wertebereich	$[-1; 1]$, also: $-1 \leq \sin(x) \leq 1$	$[-1; 1]$, also: $-1 \leq \cos(x) \leq 1$
Periodizität	Periode 2π $\sin(x) = \sin(x + k \cdot 2\pi); k \in \mathbb{Z}$	Periode 2π $\cos(x) = \cos(x + k \cdot 2\pi); k \in \mathbb{Z}$
Symmetrie	punktsymmetrisch zum Ursprung: $\sin(-x) = -\sin(x)$	achsensymmetrisch zur y-Achse: $\cos(-x) = \cos(x)$
Nullstellen	$k \cdot \pi; k \in \mathbb{Z}$	$\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi; k \in \mathbb{Z}$
Ableitungen	$f'(x) = \cos(x)$	$g'(x) = -\sin(x)$
Stammfunktion	$\int \sin(x) = -\cos(x) + c$	$\int \cos(x) = \sin(x) + c$

Variationen der Sinusfunktion

Im Folgenden werden die Auswirkungen der Parameter a, b, c und d der Funktion

$$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d; \quad a, b \neq 0$$

auf den Graphen der Sinusfunktion betrachtet:

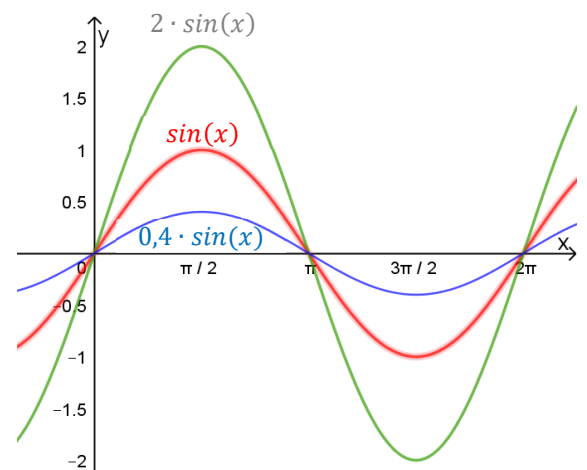
Die Funktion $f_1(x) = a \cdot \sin(x)$; $a \neq 0$

Der Faktor a verändert die vertikale Ausdehnung (die **Amplitude**) des Funktionsgraphen. Es gilt:

$|a| > 1 \rightarrow$ Streckung in y - Richtung

$|a| < 1 \rightarrow$ Stauchung in y - Richtung

Die Periode und die Lage der Nullstellen ändern sich nicht!



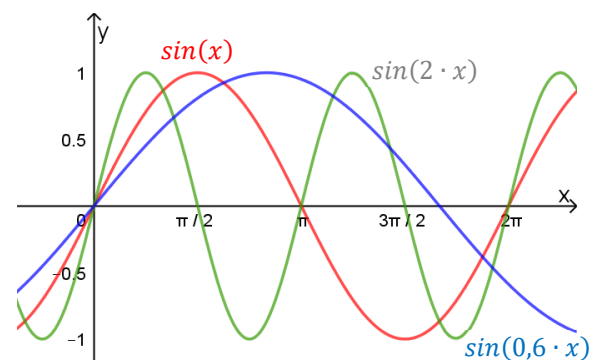
Die Funktion $f_2(x) = \sin(b \cdot x)$; $b \neq 0$

Der Faktor b verändert die horizontale Ausdehnung (die **Frequenz**) des Funktionsgraphen. Es gilt:

$|b| < 1 \rightarrow$ Streckung in x - Richtung

$|b| > 1 \rightarrow$ Stauchung in x - Richtung

Die Periode beträgt nun $\frac{1}{|b|} \cdot 2\pi$, die Nullstellen liegen nun bei $\frac{1}{|b|} \cdot k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.



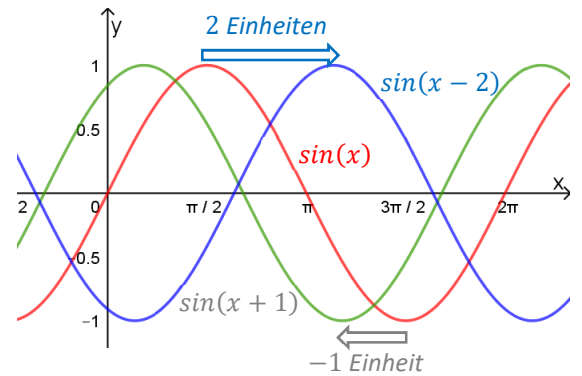
Die Funktion $f_3(x) = \sin(x + c)$

Der Summand c bewirkt eine horizontale Verschiebung (Phasenverschiebung) des Funktionsgraphen in x – Richtung. Es gilt:

$c < 0 \rightarrow$ Verschiebung in positive x - Richtung

$c > 0 \rightarrow$ Verschiebung in negative x - Richtung

Die Periode ändert sich nicht, die Nullstellen liegen nun bei $k\pi - c$; $k \in \mathbb{Z}$.



Die Funktion $f_4(x) = \sin(x) + d$

Der Summand d bewirkt eine vertikale Verschiebung in y – Richtung. Es gilt:

$d > 0 \rightarrow$ Verschiebung in positive y - Richtung

$d < 0 \rightarrow$ Verschiebung in negative y - Richtung

Die Periode ändert sich nicht.

Nullstellen existieren nur für $|d| \leq 1$. Nur dann gilt:

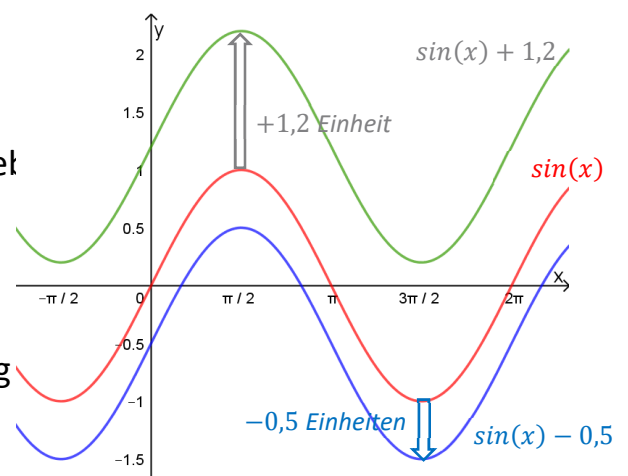
$$\sin(x) + d = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(x) = -d$$

$$\Leftrightarrow x = \arcsin(-d) \vee x = \pi - \arcsin(-d)$$

Da die Periode unverändert 2π beträgt, haben die Nullstellen also die Lage

$$\Leftrightarrow x = \arcsin(-d) + 2k\pi \vee x = \pi - \arcsin(-d) + 2k\pi$$



Beispiel : $f(x) = \sin(x) - 0,5$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) - 0,5$$

$$\Leftrightarrow \sin(x) = 0,5$$

$$\Leftrightarrow x = \arcsin(0,5) + 2k\pi \vee x = \pi - \arcsin(0,5) + 2k\pi$$

Für $k = 0$ gilt: $x = \frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi$

Für $k = 1$ gilt: $x = \frac{13}{6}\pi \vee x = \frac{17}{6}\pi$ u.s.w

Beispiel einer Kurvendiskussion

Betrachtet wird die Funktion $f(x) = 3 \cdot \sin(2 \cdot (x - 1)) - 1$
im Intervall $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Achsenschnittpunkte:

(1) Schnittpunkt mit der $f(x)$ - Achse:

$$f(0) = 3 \cdot \sin(-2) - 1 \approx -3,7 \Rightarrow \mathbf{S_y(0 | -3,7)}$$

(2) Schnittpunkte mit der x - Achse: $f(x) = 0$

$$3 \cdot \sin(2 \cdot (x - 1)) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(2x - 2) = \frac{1}{3} / \text{Substitution: } 2x - 2 = z$$

$$\Leftrightarrow z = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0,34 \vee z = \pi - \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) \approx 2,80$$

$$\Rightarrow 2x - 2 \approx 0,34 \vee 2x - 2 \approx 2,80$$

$$\Leftrightarrow x \approx 1,17 \vee x \approx 2,40$$

Die Periode beträgt: $\frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi$, also lauten die Nullstellen:

$$x_n \approx 1,17 + k\pi \vee x_n \approx 2,40 + k\pi$$

$$k = 0: \quad x_n \approx 1,17 \vee x_n \approx 2,40$$

$$k = 1: \quad x_n \approx 4,31 (\vee x_n \approx 5,54)$$

Die Nullstellen innerhalb des Intervalls $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$ lauten:

$$\mathbf{N_1(1,17|0), N_2(2,40|0) \text{ und } N_3(4,31|0)}$$

Extrempunkte:

Ableitungen: $f'(x) = 6 \cdot \cos(2x - 2)$; $f''(x) = -12 \cdot \sin(2x - 2)$

Notw.Bed.: $f'(x_E) = 0$

$$\Rightarrow 6 \cdot \cos(2x - 2) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 2 = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = 1 + \frac{\pi}{4} + \frac{k}{2}\pi$$

$$k = -1: \quad x_E = 1 - \frac{\pi}{4} \approx 0,21$$

$$k = 0: \quad x_E = 1 + \frac{\pi}{4} \approx 1,79$$

$$k = 1: \quad x_E = \frac{3\pi}{4} \approx 3,36$$

Hinr.Bed.: $f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) \neq 0$

$$f''(0,21) \approx 12,0 \neq 0; f''(1,79) \approx -12,0 \neq 0; f''(3,36) \approx 12,0 \neq 0$$

$$f(0,21) \approx -4,00 \Rightarrow T_1(0,21 | -4,00)$$

$$f(1,79) \approx 2,00 \Rightarrow H(1,79 | 2,00)$$

$$f(3,36) \approx -4,00 \Rightarrow T_2(3,36 | -4,00)$$

Wendepunkte:

$$3.\text{Ableitung: } f'''(x) = -24 \cdot \cos(2x - 2)$$

$$\text{Notw.Bed.: } f''(x_w) = 0$$

$$-12 \cdot \sin(2x - 2) = 0 \Leftrightarrow \sin(2x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 2 = k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = 1 + \frac{k}{2}\pi$$

$$k = 0: \quad x_w = 1$$

$$k = 1: \quad x_w = 1 + \frac{\pi}{2} \approx 2,57$$

$$k = 2: \quad x_w = 1 + \pi \approx 4,14$$

$$\text{Hinr.Bed.: } f''(x_w) = 0 \wedge f'''(x_w) \neq 0$$

$$f'''(1) = -24 \neq 0; \quad f'''(2,57) \approx -24 \neq 0; \quad f'''(4,14) = -24 \neq 0$$

$$f(1) = -1 \Rightarrow W_1(1 | -1)$$

$$f(2,57) = -1 \Rightarrow W_2(2,57 | -1)$$

$$f(4,14) = -1 \Rightarrow W_3(4,14 | -1)$$

Funktionsgraph:

