STOCHASTIK

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Hartmut Meyer
https://mathemeyer.com

Inhalt

Mehrfeldertafeln

Tragen die Elemente einer Menge mehr als ein Merkmal, so kann das zufällige Auswählen eines der Elemente unterschiedliche Ergebniskombinationen aufweisen. Diese Kombinationen können in einer Mehrfeldertafel dargestellt werden:

Werden die Elemente einer Menge auf z.B. zwei unterschiedliche Merkmale M_1 und M_2 untersucht, so kann mit den Definitionen:

- M_1: das Element weist das Merkmal M_1 auf
- M_2: das Element weist das Merkmal M_2 auf
- $\overline{M_1}$: das Element weist nicht das Merkmal M_1 auf
- $\overline{M_2}$: das Element weist nicht das Merkmal M_2 auf

eine **Vierfeldertafel** Auskunft über die unterschiedlichen Ergebniskombinationen geben:

	M_1	$\overline{M_1}$
M_2	$M_1 \cap M_2$	$\overline{M_1} \cap M_2$
$\overline{M_2}$	$M_1 \cap \overline{M_2}$	$\overline{M_1} \cap \overline{M_2}$

Hierbei bedeutet:

- $M_1 \cap M_2$: das Element besitzt beide Merkmale
- $M_1 \cap \overline{M_2}$: das Element besitzt das Merkmal M_1 aber nicht das Merkmal M_2
- $\overline{M_1} \cap M_2$: das Element besitzt nicht das Merkmal M_1 aber das Merkmal M_2
- $\overline{M_1} \cap \overline{M_2}$: das Element besitzt keines der beiden Merkmale

Beispiel 1: *Aus der Menge {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} wird zufällig eine Zahl ausgewählt.*

Betrachtet werden hierbei die beiden Merkmale:
A: *„die Zahl ist eine Primzahl", also {2, 3, 5, 7}*
B: *„die Zahl ist größer als 5", also {6, 7, 8, 9, 10}*

Vierfeldertafel:

	A	$\overline{A}$
B	{7}	{6, 8, 9, 10}
$\overline{B}$	{2, 3, 5}	{1, 4}

Vierfeldertafel mit absoluten Häufigkeiten:

	A	$\overline{A}$	Summe
B	1	4	5
$\overline{B}$	3	2	5
Summe	4	6	10

Vierfeldertafel mit relativen Häufigkeiten bzw. Wahrscheinlichkeiten:

	A	$\overline{A}$	Summe
B	0,1	0,4	0,5
$\overline{B}$	0,3	0,2	0,5
Summe	0,4	0,6	1

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses kann unterschiedlich groß sein, je nachdem, ob ein anderes Ereignis bereits eingetreten ist oder nicht.
Um diesen Einfluss zu untersuchen, wird der Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit eingeführt:

Mit $\boldsymbol{P_A(B)}$ wird die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\boldsymbol{B}$, unter der Bedingung, dass das Ereignis $\boldsymbol{A}$ bereits eingetreten ist, bezeichnet.

In dem Beispiel auf Seite 3 gilt für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B (die zufällig gewählte Zahl ist größer als 5) zunächst einmal: $\boldsymbol{P(B) = \frac{1}{2}}$.
Denn unter den zehn möglichen Zahlen sind genau fünf größer als 5 – gehören also zu dem Ereignis B.

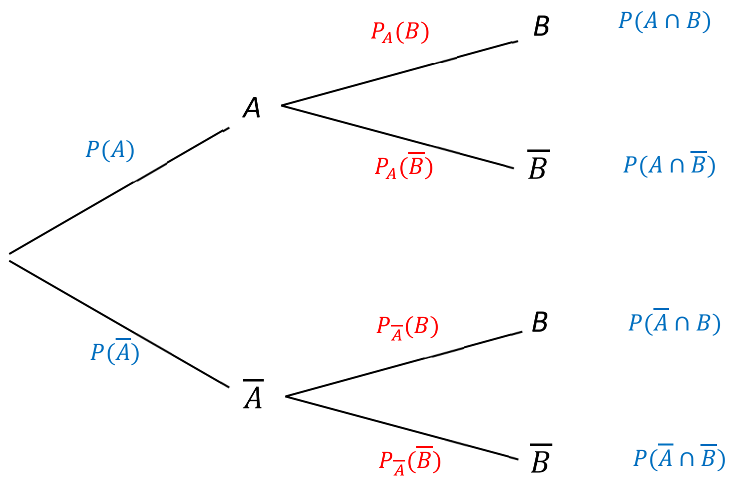
Erhält man nach der Ziehung jedoch die Information, dass es sich bei der Zahl um eine Primzahl handelt, also das Ereignis A eingetreten ist, so ändert sich die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B.
Nun gilt: $\boldsymbol{P_A(B) = \frac{1}{4}}$. Denn man weiß, dass nur noch die Zahlen *2, 3, 5* und *7* möglich sind und nur eine dieser vier Zahlen größer als 5 ist – also zu dem Ereignis B gehört.

Erhält man hingegen nach der Ziehung die Information, dass es sich bei der Zahl <u>nicht</u> um eine Primzahl handelt, also das Ereignis A <u>nicht</u> eingetreten ist, so ändert sich ebenfalls die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B.
Nun gilt: $\boldsymbol{P_{\overline{A}}(B) = \frac{2}{3}}$. Denn nun weiß man, dass nur noch die Zahlen *1, 4, 6, 8, 9* und *10* möglich sind und genau vier dieser sechs Zahlen größer als 5 sind – also zu dem Ereignis B gehören.

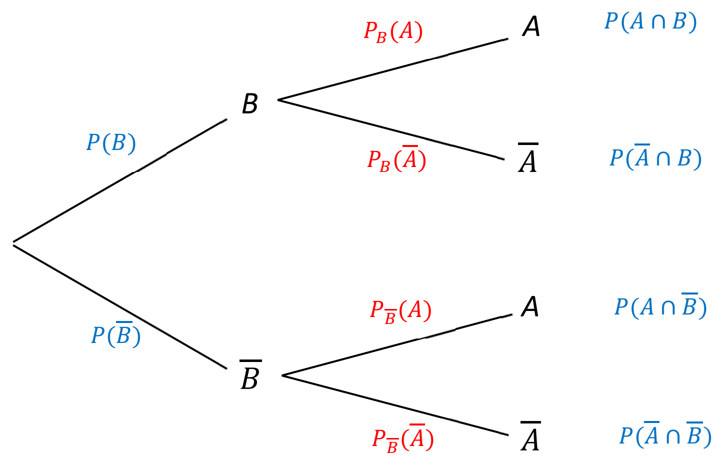
Ändert diese Information über das Ereignis A die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B, gilt also $P(B) \neq P_A(B)$ bzw. $P(B) \neq P_{\overline{A}}(B)$, so nennt man die beiden Ereignisse A und B **stochastisch abhängig** voneinander.

Ein eigentlich einstufiges Zufallsexperiment kann, wenn man die beiden Merkmale A und B in den Vordergrund stellt, als zweistufiges Zufallsexperiment übersichtlich in zwei Baumdiagrammen dargestellt werden:

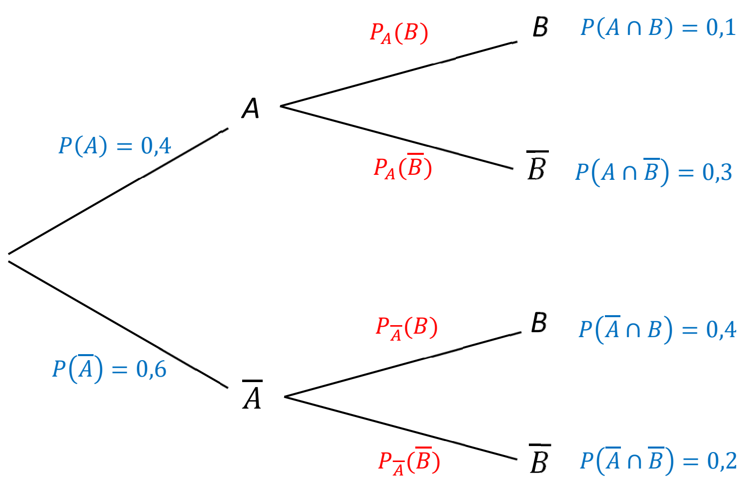
Betrachtet man zuerst das Ereignis A, so ergibt sich das folgende Baumdiagramm:



Betrachtet man zuerst das Ereignis B, so ergibt sich das sogenannte „umgekehrte Baumdiagramm“:



Überträgt man die Wahrscheinlichkeiten aus der Vierfeldertafel des Beispiels auf Seite 3 in ein entsprechendes Baumdiagramm, gilt:



In der 2.Stufe des Baumdiagramms stehen somit die bedingten Wahrscheinlichkeiten. Deren Wahrscheinlichkeiten können durch das Umstellen der Pfadregel berechnet werden. Z.B.:

$$P(A) \cdot P_A(B) = P(A \cap B) \Leftrightarrow \; P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}1}{0{,}4} = \frac{1}{4} \quad \text{(vergl. Seite 4)}$$

ebenso folgt:

$$P_A(\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(A)} = \frac{0{,}3}{0{,}4} = \frac{3}{4}$$

$$P_{\overline{A}}(B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})} = \frac{0{,}4}{0{,}6} = \frac{2}{3} \quad \text{(vergl. Seite 4)}$$

$$P_{\overline{A}}(\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{A})} = \frac{0{,}2}{0{,}6} = \frac{1}{3}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis B eintritt unter der Bedingung, dass ein Ereignis A bereits eingetreten ist, berechnet man wie folgt:

$$\boldsymbol{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}.$$

(In der Literatur wird oft die Schreibweise $P(B|A)$ anstelle von $P_A(B)$ verwendet.)

Beispiel 2: *128 Menschen wurden untersucht, ob sie braune Augen (B) bzw. schwarze Haare (S) haben. Die Ergebnisse sind in der Vierfeldertafel zusammengefasst:*

	B	$\overline{B}$	*Summe*
S	*26*	*2*	*28*
$\overline{S}$	*10*	*90*	*100*
Summe	*36*	*92*	*128*

a) *Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat eine zufällig aus dieser Gruppe ausgewählte Person braune Augen und schwarze Haare?*

b) *Man sieht eine Person dieser Gruppe von hinten, sie hat schwarze Haare. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person braune Augen hat?*

Lösungen: *a)* *Gefragt ist hier nach der „Und-Wahrscheinlichkeit" $P(B \cap S)$, da hier alle 128 Personen der Gruppe betrachtet werden.*
Es gilt: $P(B \cap S) = \frac{26}{128} \approx 0{,}203.$
Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person der Gruppe braune Augen und schwarze Haare hat, beträgt ca. 20,3%.

b) *Gefragt ist hier nach der bedingten Wahrscheinlichkeit $P_S(B)$, da hier nur die 28 schwarzhaarigen Personen betrachtet werden.*
Es gilt: $P_S(B) = \frac{26}{28} \approx 0{,}929.$
Die Wahrscheinlichkeit, dass eine schwarzhaarige Person braune Augen hat, beträgt ca. 92,9%.

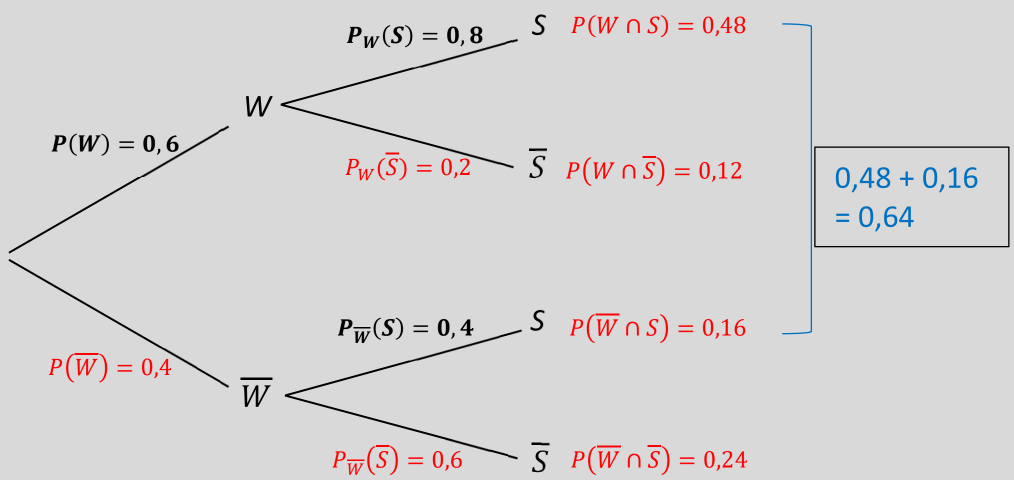
Beispiel 3: *Auf einem Schiff kann man Süßigkeiten am Kiosk kaufen. Von den an einer Schiffsrundfahrt teilnehmenden Personen sind 60 % Frauen. 80 % der reisenden Frauen und 40 % der reisenden Männer kaufen Süßigkeiten am Kiosk.*

Ein Passagier hat Süßigkeiten am Kiosk gekauft.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es sich dabei um eine Frau handelt. (Quelle: ZA 2017)

Lösungen: *Mit den Vereinbarungen:* W: *Der Passagier ist weiblich.*
S: *Der Passagier kauft Süßigkeiten.*

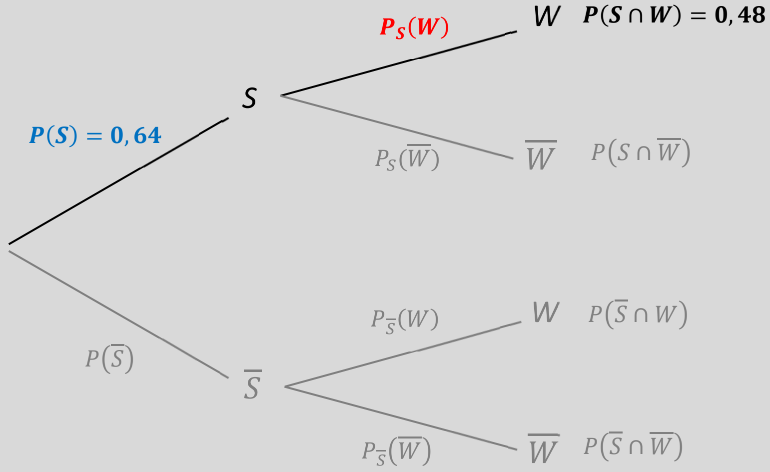
ist also gegeben: $P(W) = 0{,}6\,;\;\; P_W(S) = 0{,}8\,;\;\; P_{\overline{W}}(S) = 0{,}4$

Es ergibt sich folgendes Baumdiagramm:
fett *gedruckt: gegebene Wahrscheinlichkeiten*
rot gedruckt: ergänzte Wahrscheinlichkeiten



Gefragt ist nach der bedingten Wahrscheinlichkeit $P_S(W)$*, da hier nicht alle Passagiere, sondern nur die Personen, die Süßigkeiten kaufen betrachtet werden.*

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit findet man in dem umgekehrten Baumdiagramm:



Die Wahrscheinlichkeit $P(S \cap W)$ kann aus dem ersten Baumdiagramm übertragen werden, da gilt:

$$P(S \cap W) = P(W \cap S) = 0{,}48$$

Die Wahrscheinlichkeit $P(S)$ kann im ersten Baumdiagramm berechnet werden. Hier gilt:

$$P(S) = P(W \cap S) + P\left(\overline{W} \cap S\right) = 0{,}48 + 0{,}16 = 0{,}64$$

(Es gilt: Alle Frauen die Süßigkeiten kaufen und alle Männer die Süßigkeiten kaufen bilden zusammen die Menge aller Personen die Süßigkeiten kaufen.)

Damit kann die gesuchte Wahrscheinlichkeit berechnet werden:

$$P_S(W) = \frac{P(S \cap W)}{P(S)} = \frac{0{,}48}{0{,}64} = 0{,}75$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei dem beschriebenen Passagier um eine Frau handelt, beträgt 75%.

Beispiel 4: *Die Auswertung des Klassenbuchs hat folgende Fakten ergeben:*
Schüler A kam an 25% und Schüler B an 30% der Unterrichtstage zu spät zur 1.Stunde. Nur an 52,5% der Unterrichtstage waren beide Schüler pünktlich zur 1.Stunde in der Schule.

Gibt es einen Zusammenhang zwischen dem Zuspätkommen der beiden Schüler?

Mit den Vereinbarungen: A: *Schüler A kommt zu spät.*
B: *Schüler B kommt zu spät.*

ergibt sich folgende Vierfeldertafel:
***fett** gedruckt: gegebene Wahrscheinlichkeiten*
rot gedruckt: ergänzte Wahrscheinlichkeiten

	A	$\overline{A}$	*Summe*
B	*0,075*	*0,225*	***0,3***
$\overline{B}$	*0,175*	***0,525***	*0,7*
Summe	***0,25***	*0,75*	***1,0***

Lösung: *Berechnet man die bedingte Wahrscheinlichkeit* $P_A(B)$*, also die Wahrscheinlichkeit, dass Schüler B zu spät kommt, wenn sich schon Schüler A verspätet, ergibt sich:*

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}075}{0{,}25} = 0{,}3$$

Es gilt also: $P_A(B) = P(B) = 0{,}3$*, somit sind die Ereignisse* A *und* B *stochastisch unabhängig. Es gibt keinen Zusammenhang!*