



METRISCHE GEOMETRIE

Abstände und Winkel

Hartmut Meyer
<https://mathemeyer.com>

Inhalt

Grundlagen	2
Abstände im Raum	
Abstand Punkt – Punkt	3
Abstand Punkt – Ebene	4
Abstand zweier parallelen Ebenen.....	4
Abstand Punkt – Gerade	5
Abstand zweier parallelen Geraden.....	6
Abstand zweier windschiefen Geraden	6
Winkel	
Winkel zweier Vektoren	7
Winkel zwischen zwei Geraden.....	8
Winkel Gerade – Ebene.....	9
Winkel zwischen zwei Ebenen	10

Grundlagen - Verknüpfungen

Für die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ und eine reelle Zahl r gilt:

I. Die Vektoraddition

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

II. Die Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl

$$r \cdot \vec{a} = r \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_1 \\ r \cdot a_2 \\ r \cdot a_3 \end{pmatrix}$$

III. Das Skalarprodukt zweier Vektoren

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

→ Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist stets eine reelle Zahl!

→ Zwei orthogonale Vektoren haben das Skalarprodukt null.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

IV. Das Kreuzprodukt (Vektorprodukt) zweier Vektoren

Für zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ gilt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

→ Das Kreuzprodukt zweier Vektoren ist stets ein Vektor!

→ Es gilt: $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}$ und $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$.

Der Abstand zwischen zwei Punkten im Raum

Der Abstand zweier Punkte $A(a_1|a_2|a_3)$ und $B(b_1|b_2|b_3)$ entspricht dem

Betrag des Vektors $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$.

$$d(A, B) = \left| \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Beispiel:

Mit $A(2|-5|9)$ und $B(-4|-3|6)$ gilt:

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \left| \begin{pmatrix} -4 - 2 \\ -3 - (-5) \\ 6 - 9 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right| \\ &= \sqrt{(-6)^2 + 2^2 + (-3)^2} = 7 \text{ LE} \end{aligned}$$

Der Abstand zwischen einem Punkt und einer Ebene im Raum

Für den Abstand des Punktes $A(a_1|a_2|a_3)$ und der Ebene $E: [\vec{x} - \overrightarrow{OP}] \cdot \vec{n} = 0$ gilt:

$$d(A, E) = \left| [\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP}] \cdot \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n} \right|$$

Beispiel:

Mit $A(2|-1|4)$ und $E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} d(A, E) &= \left| \left[\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \right] \cdot \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \frac{1}{6} \cdot \left[\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right] \right| \\ &= \left| \frac{1}{6} \cdot (-12 - 6 - 36) \right| = 9 \text{ LE} \end{aligned}$$

Der Abstand zwischen zwei parallelen Ebenen im Raum

Der Abstand zwischen den beiden parallelen Ebenen $E_1: [\vec{x} - \overrightarrow{OP}] \cdot \vec{n}_1 = 0$

und $E_2: [\vec{x} - \overrightarrow{OQ}] \cdot \vec{n}_2 = 0$ ($\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$) entspricht dem Abstand des Punktes P von E_2 (bzw. Q von E_1), da alle Punkte der Ebene E_1 den gleichen Abstand zur Ebene E_2 haben (dies gilt auch umgekehrt).

$$d(E_1, E_2) = d(P, E_2) = \left| [\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}] \cdot \frac{1}{|\vec{n}_2|} \cdot \vec{n}_2 \right|$$

Der Abstand zwischen einem Punkt und einer Geraden im Raum

Der Abstand eines Punktes $A(a_1|a_2|a_3)$ von einer Geraden $g: \vec{x} = \vec{p} + \mu \cdot \vec{v}$ entspricht dem Betrag des Vektors \overrightarrow{AF} , wobei F der Fußpunkt des Lotes von A auf g ist.

Bei der Berechnung von F kann man folgendermaßen vorgehen:

- (1) Erstelle eine Lotebene L zur Geraden g durch den Punkt A .
→ $L: [\vec{x} - \overrightarrow{OA}] \cdot \vec{v} = 0$
- (2) Berechne den Durchstoßpunkt der Geraden g mit der Ebene L .
→ Ansatz: $[\vec{p} + \mu \cdot \vec{v} - \overrightarrow{OA}] \cdot \vec{v} = 0$
→ Das hierdurch berechnete μ wird in den Geradenterm eingesetzt, es ergibt sich der Vektor \overrightarrow{OF} .

Schließlich gilt dann: $d(A, g) = |\overrightarrow{AF}|$.

Beispiel: $A(2|-3|5)$ und $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(1) Lotebene zu g durch A : $L: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

(2) Lotfußpunkt F berechnen:

$$\left[\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 + 6 + 2 + \mu \cdot (4 + 1 + 1) = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \mu = -2$$

$$\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow F(0|1|5)$$

$$d(A, g) = |\overrightarrow{AF}| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4 + 16 + 0} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \text{ LE}$$

Der Abstand zwischen zwei parallelen Geraden im Raum

Der Abstand zwischen den (echt) parallelen Geraden $g_1: \vec{x} = \vec{p} + \mu \cdot \vec{v}$ und $g_2: \vec{x} = \vec{q} + \lambda \cdot \vec{w}$ ($\vec{v} \parallel \vec{w}$) entspricht dem Abstand des Punktes P von der Geraden g_2 (bzw. Q von g_1), da alle Punkte der Geraden g_1 den gleichen Abstand zur Geraden g_2 haben (dies gilt auch umgekehrt).

$$d(g_1, g_2) = d(P, g_2)$$

Der Abstand zwischen zwei windschiefen Geraden im Raum

Für den Abstand zwischen den windschiefen Geraden $g_1: \vec{x} = \vec{p} + \lambda \cdot \vec{v}$ und $g_2: \vec{x} = \vec{q} + \mu \cdot \vec{w}$ ($\vec{v} \nparallel \vec{w}$) gilt:

$$d(g_1, g_2) = \left| [\vec{p} - \vec{q}] \cdot \frac{1}{|\vec{v} \times \vec{w}|} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) \right|$$

Beispiel: $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Mit $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 17 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\left| \begin{pmatrix} 10 \\ 17 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{100 + 289 + 1} = \sqrt{390}$ gilt:

$$\begin{aligned} d(g_1, g_2) &= \left| \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{390}} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 17 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{390}} \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 17 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \right| \\ &= \left| \frac{30 - 34 + 1}{\sqrt{390}} \right| = \frac{3}{\sqrt{390}} \text{ LE} \end{aligned}$$

Der Winkel zwischen zwei Vektoren im Raum

Für den Winkel α zwischen den beiden Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ gilt:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Beispiel: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\alpha = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

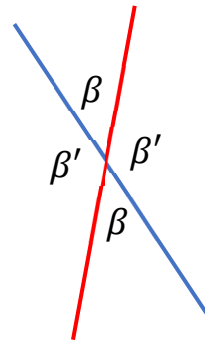
$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right|} = \frac{12 - 5 + 12}{\sqrt{53} \cdot \sqrt{38}} = \frac{19}{\sqrt{2014}}$$

$$\arccos\left(\frac{19}{\sqrt{2014}}\right) \approx 65,0^\circ$$

Der Winkel zwischen zwei Geraden im Raum

Schneiden sich zwei Geraden, so entstehen vier Winkel.
Je zwei der Größe β und je zwei der Größe β' .

Es gilt hierbei: $\beta' = 180^\circ - \beta$. Im Allgemeinen wird mit dem Schnittwinkel zweier Geraden der Winkel bezeichnet, der kleiner oder gleich 90° ist.



Für den Schnittwinkel β zwischen der Geraden $g_1: \vec{x} = \vec{p} + \mu \cdot \vec{v}$ und der Geraden $g_2: \vec{x} = \vec{q} + \lambda \cdot \vec{w}$ gilt:

$$\cos(\beta) = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{w}|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}$$

→ Durch die Betragsstriche im Zähler des Bruches ergibt sich automatisch der richtige Schnittwinkel β !

Beispiel: $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $\beta = \sphericalangle(g_1, g_2)$

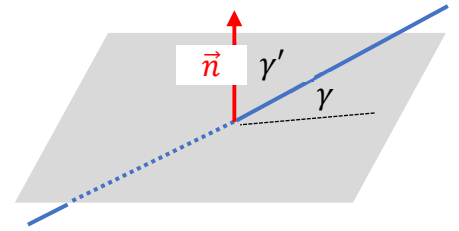
Ohne Rechnung: Die Geraden schneiden sich in dem Punkt (3|4|1).

$$\cos(\beta) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|-2 + 3 + 2|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{84}}$$

$$\arccos\left(\frac{3}{\sqrt{84}}\right) \approx 70,9^\circ$$

Der Winkel zwischen einer Geraden und einer Ebene im Raum

Zur Berechnung des Schnittwinkels γ zwischen einer Geraden $g: \vec{x} = \vec{p} + \mu \cdot \vec{v}$ und einer Ebene $E: [\vec{x} - \vec{q}] \cdot \vec{n} = 0$ bestimmt man zunächst den Winkel γ' zwischen dem Richtungsvektor \vec{v} der Geraden und dem Normalenvektor \vec{n} der Ebene.
Es gilt dann: $\gamma = 90^\circ - \gamma'$.



Es gilt zunächst: $\cos(\gamma') = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|}$ und $\gamma = 90^\circ - \gamma'$.

Wegen des Zusammenhangs $\cos(90^\circ - \gamma) = \sin(\gamma)$ gilt (einfacher) für den Schnittwinkel γ :

$$\sin(\gamma) = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|}$$

Beispiel: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $E: 7x_1 - x_2 + 5x_3 - 24 = 0$

Es gilt: $\overrightarrow{RV}_g = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$. $\gamma = \sphericalangle(g, E)$

$$\sin(\gamma) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|7 + 1 + 10|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{75}} = \frac{18}{\sqrt{450}}$$

$$\arcsin\left(\frac{18}{\sqrt{450}}\right) \approx 58,1^\circ$$

Der Winkel zwischen zwei Ebenen im Raum

Der Schnittwinkel δ zwischen zwei sich schneidenden Ebenen

$E_1: [\vec{x} - \vec{p}] \cdot \vec{n}_1 = 0$ und $E_2: [\vec{x} - \vec{q}] \cdot \vec{n}_2 = 0$ entspricht dem Winkel zwischen den beiden Normalenvektoren \vec{n}_1 und \vec{n}_2 der beiden Ebenen.

$$\cos(\delta) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

Beispiel: $E_1: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ und $E_2: -3x_1 + x_2 + x_3 - 7 = 0$

Es gilt: $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\delta = \sphericalangle(E_1, E_2)$

$$\cos(\delta) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|-6 + 1 - 1|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{11}} = \frac{6}{\sqrt{66}}$$

$$\arccos\left(\frac{6}{\sqrt{66}}\right) \approx 42,4^\circ$$